

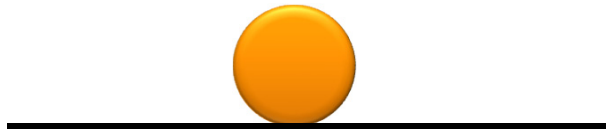
## セミナーの狙い

- 実験を通して振動現象を理解し、力学的直感を養うと共に、振動の数理モデルの構築および妥当性の評価方法について解説します。
- 振動を特徴付ける最も重要なパラメータは**固有振動**です。固有振動は**共振**と深い関係があり、本セミナーでは時間域および周波数域の双方からこの現象を考えてみます。
- 計測実験を行います。板の振動実験では、手回し振動機を使って共振とは何かを体験します。また、衝撃試験（加速度ピックアップ）から固有振動数を抽出します。
- 実際の振動現象とCAE解析で得られる現象には「乖離」があります。どうすればその乖離がゼロに近づくのか、を考えます。実験を再現するための数値モデルの「妥当性」について検討を行います。

# 1.1 共振のメカニズム

共振のメカニズムは、数式を用いて説明するのが手っ取り早い。

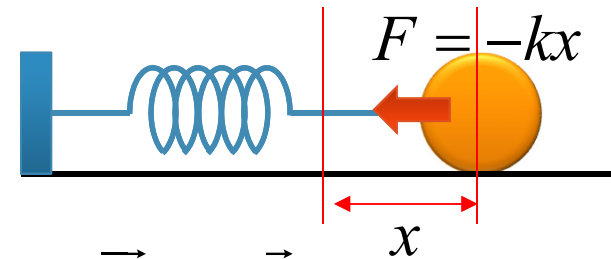
## 力の釣り合い(運動の第1法則)



$$\vec{F} = 0$$

動かないものは  
合力がゼロ

## ニュートンの法則(運動の第2法則)



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

ある瞬間のバネによる引張が  
駆動力となって、加速度が生じる。

つまり、静解析と異なるのは、この  
加速度項 (慣性項) があるか無いか。

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \rightarrow \quad -kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

# 1.3 有限要素法における連続体の振動解析

## 運動方程式

※このあたりはFEM実験室静解析編で詳しく講義します。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \nabla^T \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

## 構成則

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ sym. & & D_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

## 適合則

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \nabla \mathbf{u}$$

$$\nabla^T \mathbf{D} \nabla \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$



仮想仕事の原理,  
近似関数による離散化

$$-\mathbf{[K]}\{\mathbf{x}\} = \mathbf{[M]}\{\ddot{\mathbf{x}}\}$$

自由振動を表す有限要素方程式  
外力項は無いことに注意



$$-kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

バネの自由振動と似ていますね。

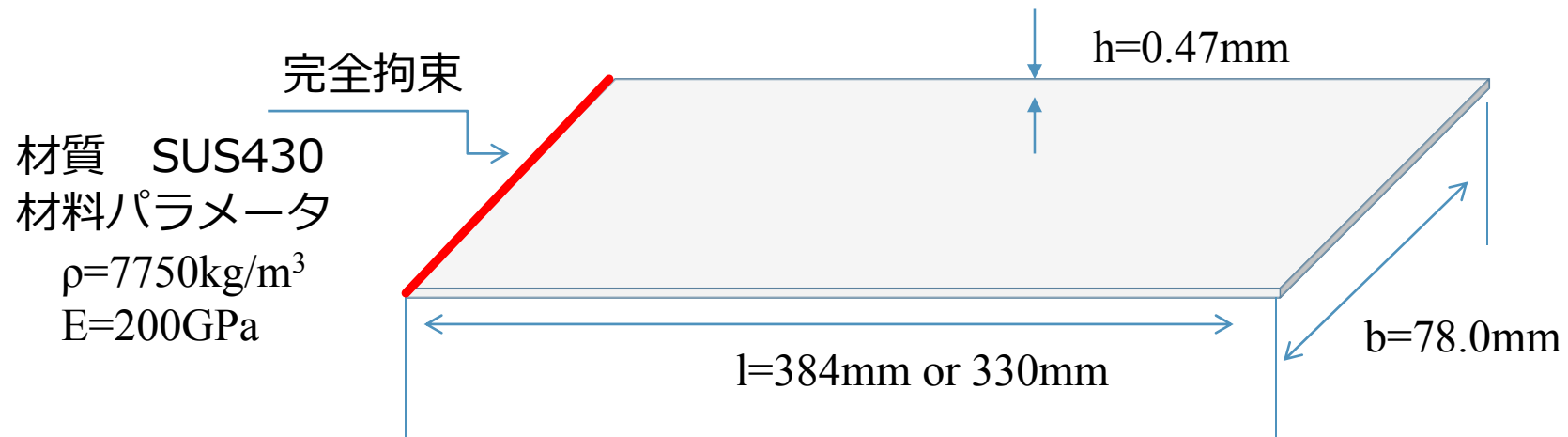


今日のセミナーでは、動画のような振動試験機は持ち運べませんので、手回しの振動試験装置を使って、みなさんで手動で共振を起こしてもらいます。

## 2.2 固有振動数の理論解(解析解)

### はりの固有振動数 (理論)

解析解(オイラー・ベルヌーイはり)



i次の固有振動数

$$f_i = \frac{(a_i)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

A: 断面積(=bh)

I: 断面 2 次モーメント(=bh<sup>3</sup>/12)

$a_i$ : 境界条件に依存したパラメータ

i=1のとき 1.875

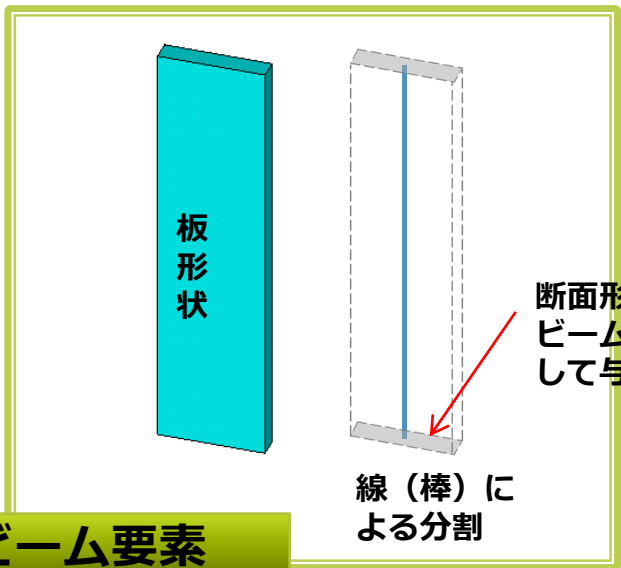
(ちなみに,  
i=2のとき4.694, i=3のとき7.855)

1[Pa]=1[N/m<sup>2</sup>]

1[N]=1 [kg m/ s<sup>2</sup>]

1[Hz]=1 [cycle/s]

# 3.1 固有振動数のFEM解析



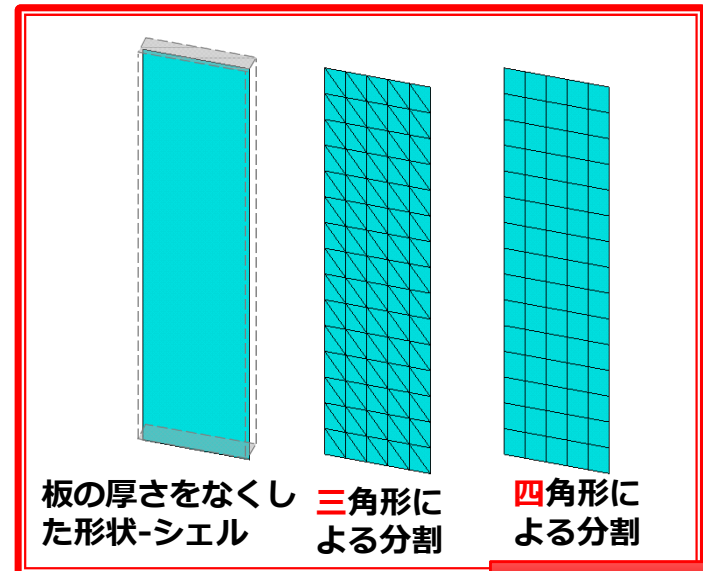
板形状

断面形状の特性を  
ビーム要素の属性と  
して与えます。

線（棒）による分割

**ビーム要素**

This diagram illustrates the beam element approach. It shows a rectangular plate on the left. In the center, a vertical line represents the beam element, with a red arrow pointing to it from the text '断面形状の特性をビーム要素の属性として与えます。' (Provide the characteristics of the cross-section as attributes of the beam element). To the right, the plate is shown divided into segments by vertical lines, labeled '線（棒）による分割' (Division by line (rod)). A green box labeled 'ビーム要素' (Beam element) encompasses the entire diagram.



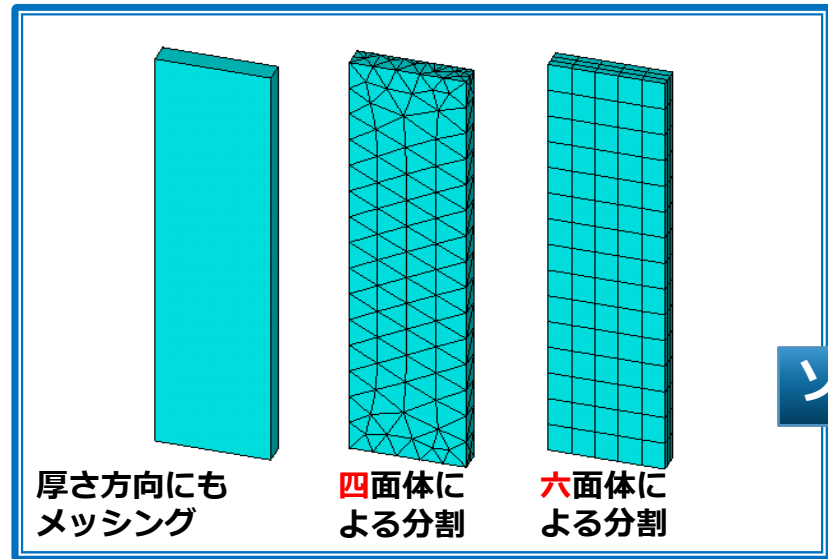
板の厚さをなくし  
た形状-シェル

三角形による分割

四角形による分割

**シェル要素**

This diagram illustrates the shell element approach. It shows three stages: a rectangular plate, a plate with a triangular mesh on its surface, and a plate with a quadrilateral mesh. The text '板の厚さをなくした形状-シェル' (Shape with thickness removed - shell) is positioned below the first stage. Below the second and third stages are the labels '三角形による分割' (Division by triangle) and '四角形による分割' (Division by quadrangle) respectively. A red box labeled 'シェル要素' (Shell element) encompasses the entire diagram.



厚さ方向にも  
メッシング

四面体による分割

六面体による分割

三角形による  
分割

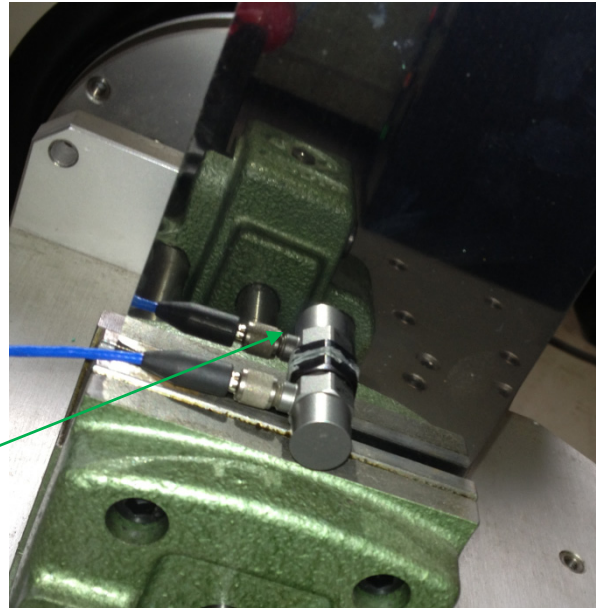
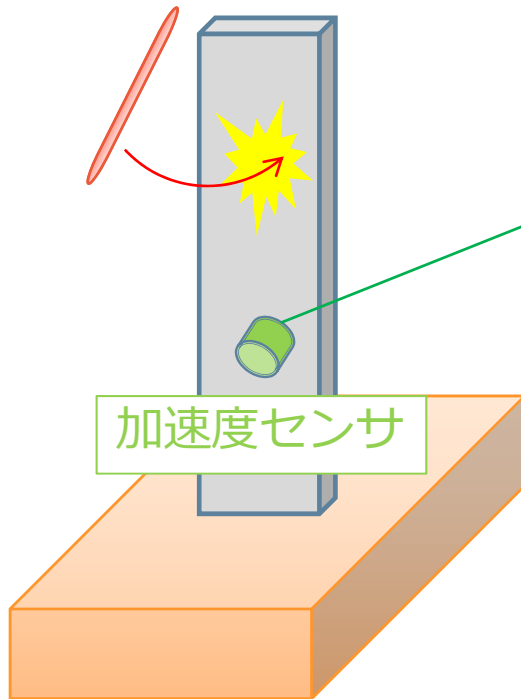
**ソリッド要素**

This diagram illustrates the solid element approach. It shows three stages: a rectangular plate, a plate with a tetrahedral mesh, and a plate with a hexahedral mesh. The text '厚さ方向にもメッシング' (Meshing also in the thickness direction) is positioned below the first stage. Below the second and third stages are the labels '四面体による分割' (Division by tetrahedron) and '六面体による分割' (Division by hexahedron) respectively. To the right of the diagram is the text '三角形による分割' (Division by triangle). A blue box labeled 'ソリッド要素' (Solid element) encompasses the entire diagram.



# 振動の計測方法の説明

適当な位置で加振する.



加速度センサ  
PCB piezotronics製, 352C03  
(感度 9.95mV/g,)



AD変換ボード  
ナショナルインスツルメンツ  
NI-9234

センサ出力を記録する.  
ノートPCで計測制御.  
インターフェースはLabVIEWを使用.

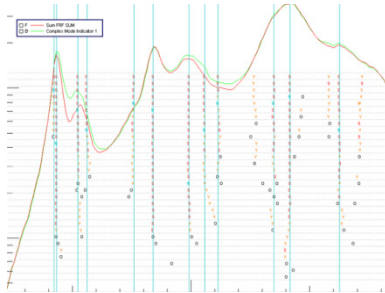


### 実験モーダル解析

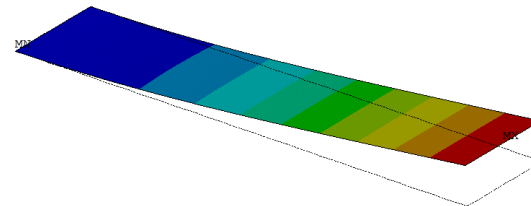


試験対象を加振  
(ハンマと加速度センサの  
セットが必要)

伝達関数の計測

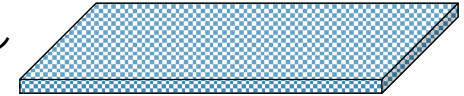


動的パラメータの同定



### CAEモーダル解析

CADモデル



有限要素方程式

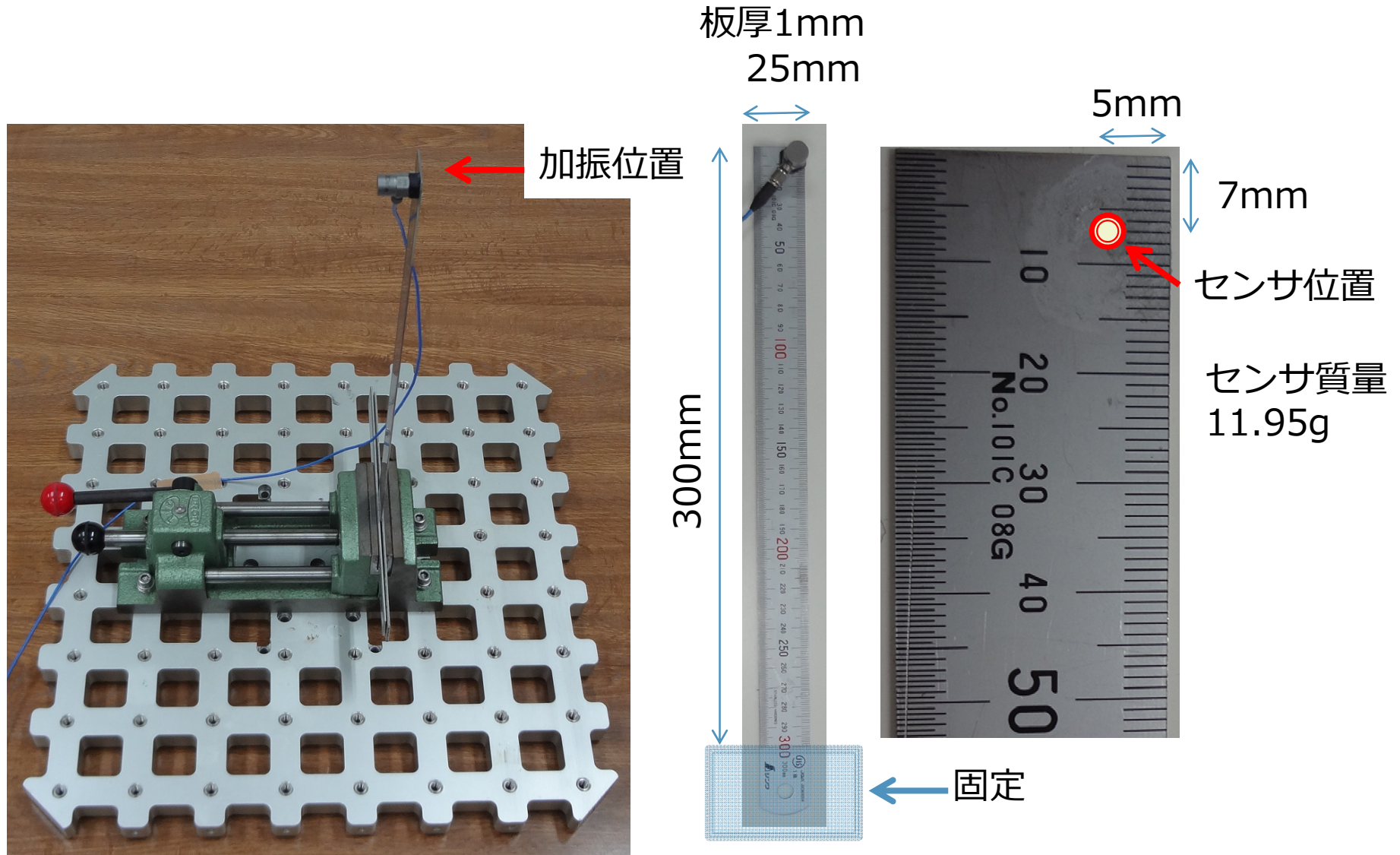
$$-[\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\}$$

固有値解析の実行

固有振動数,  
モード形等の出力



# 6.3 実験と解析の過渡応答の比較



ヤング率204GPa, ポアソン比0.3, 密度7780kg/m<sup>3</sup> (SUS420J2)