デジタル計算機の歴史

主に wiki より,その他は
http://www.nec.co.jp/profile/empower/history/1985.html
http://pr.fujitsu.com/jp/news/2010/09/28.html
http://museum.ipsj.or.jp/computer/super/0011.html
http://pc.watch.impress.co.jp/img/pcw/docs/601/851/html/1.jpg.html
http://www.gdep.jp/product/view/64

ENIAC, 1946

IBM 704, 1954
初商業用FPU

CDC 6600, 1964
初成功スパコン

CRAY-1, 1975

NEC SX-3, 1989
共有メモリ型

貿易摩擦の頃

NWT（富士通VPP-500）, 1993
初分散メモリ型

地球シミュレータ（NEC SX-5）, 2002

Intel 8086, 1978
8087, 1980

No figure

Intel Haswell, 2013.06

パソコン

スパコン

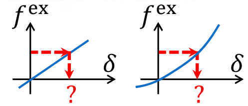
GPU

京（富士通）, 2011.11

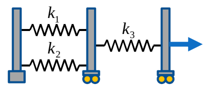
モバイル時代

NVIDIA Tesla K20, 2012.11

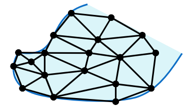
静的FEM解析を支える数値計算法

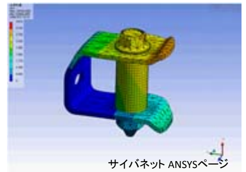


- 最終帰結先：代数方程式の求解法
  - 線形解析：
    $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ の求解
  - 非線形解析（荷重増分）：
    $\mathbf{r(x)} = \mathbf{0}$ を逐次線形化して求解



- (偏)微分方程式の近似求解法
  - 求解すべきスカラ場・ベクトル場の未知関数を離散化：
    「場」を節点値で補間（近似）
  - 最良近似問題を構成：
    各点でなく領域全体(積分)で

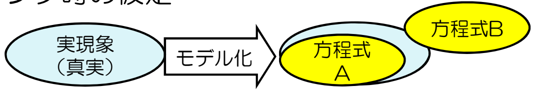




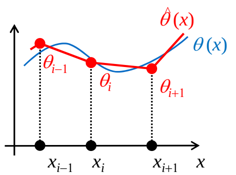
サイバネット ANSYSページ

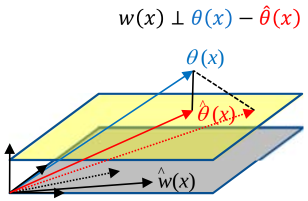
CAE計算に潜む（誤差）4

1. 数理モデリング時の仮定



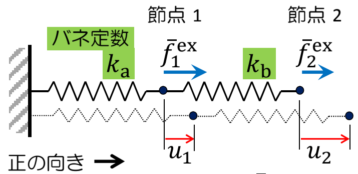
2. (偏)微分方程式の近似求解
   - 場の節点値による補間（要素選択）
   - 最良近似（FEM）の考え方

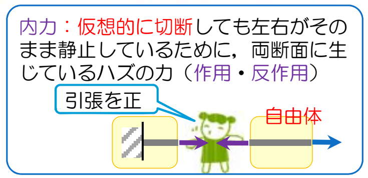


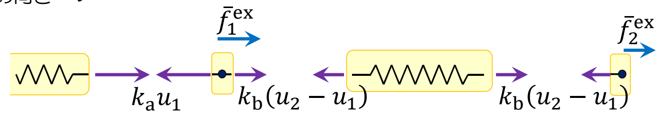


3. 浮動小数点数計算
4. ひずみ・応力のキレイな可視化

マトリクス構造解析の概略





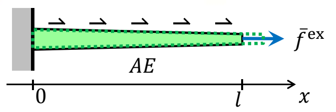


- 節点1の静止条件：$(-k_a u_1) + k_b(u_2 - u_1) + \bar{f}_1^{\mathrm{ex}} = 0$
- 節点2の静止条件：$(-k_b(u_2 - u_1)) + \bar{f}_2^{\mathrm{ex}} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k_\mathrm{a} + k_\mathrm{b} & -k_\mathrm{b} \\ -k_\mathrm{b} & k_\mathrm{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1^{\mathrm{ex}} \\ \bar{f}_2^{\mathrm{ex}} \end{Bmatrix}$$

有限要素解析（FEM）の超概略

- 1-D

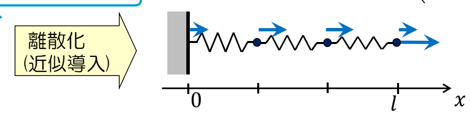


$$\frac{\partial}{\partial x}\left(AE\frac{\partial u}{\partial x}\right)+b=0 \quad (0<x<l)$$

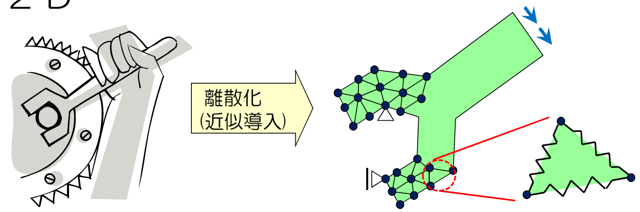
$$u(0)=0$$

$$\left.\left(AE\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=\bar{f}^{\mathrm{ex}}$$

無限でなく有限な要素に分割



- 2-D

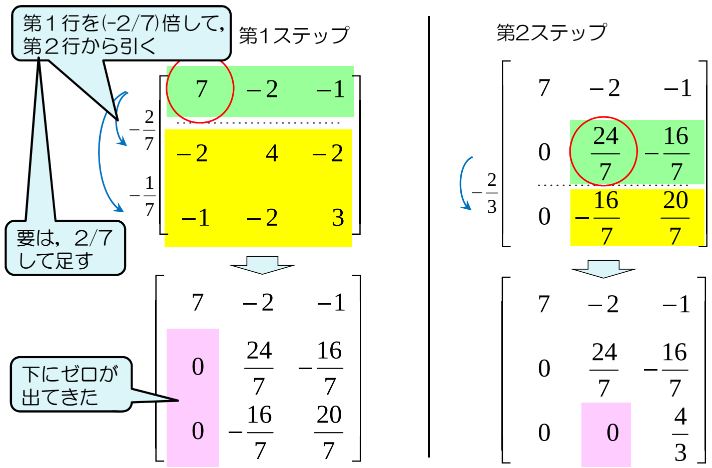


一般的な連立1次方程式の場合

例）
$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

- 実は $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$（下三角行列・上三角行列）に分解可能
  - あとは $\mathbf{y}=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{U}^{-1}\mathbf{y}$ すればよい
- 「LU分解」
  - 「ガウスの消去法」や「掃出し法」による式変形の変種
  - 非常にシステマチック・機械的 → 計算機向き
  - 補足：対称行列にはコレスキ分解，$\mathrm{LDL^T}$分解がおススメ

上三角行列 U をつくる（ゼロ増やせ）



第1ステップ：
$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{24}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & -\frac{16}{7} & \frac{20}{7} \end{bmatrix} \qquad \left(-\frac{2}{7},\ -\frac{1}{7}\right)$$

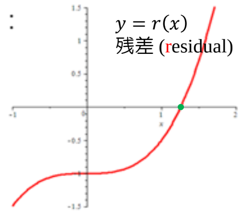
第2ステップ：
$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{24}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & -\frac{16}{7} & \frac{20}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{24}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)$$

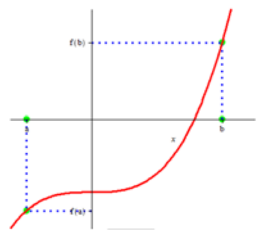
非線形方程式の反復求解法

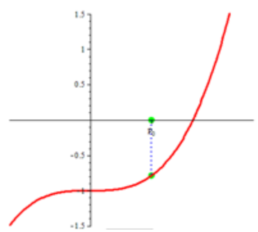
例題）$r(x)\equiv x^3/2-1=0$　　形式的には $x=\sqrt[3]{2}$ ですが…

$y=r(x)$ と $y=0$ の交点を四則演算で探す：

- 2分法（bi-section, はさみうち，半分の半分…）
  大域的求解法, 低速：初期値は自由
- ニュートン・ラフソン（NR）法
  局所的求解法, 高速：初期値に近似解が必要
  （バリエーション：修正NR法，割線剛性法）







発展：Two-bar truss 問題

- 左側barの微小ひずみ：

$$\varepsilon_L = \frac{\sqrt{(L_L + x)^2 + (H + y)^2}}{\sqrt{L_L^2 + H^2}} - 1$$

- 右側barの微小ひずみ：

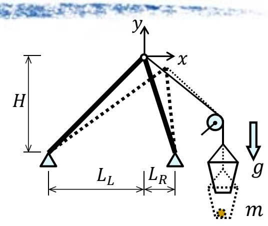
$$\varepsilon_R = \frac{\sqrt{(L_R - x)^2 + (H + y)^2}}{\sqrt{L_R^2 + H^2}} - 1$$

- 弾性エネルギの合計：

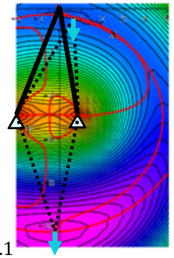
$$\Pi_{\mathrm{in}}(x,y) = \frac{1}{2} E \varepsilon_L^2 \sqrt{L_L^2 + H^2} + \frac{1}{2} E \varepsilon_R^2 \sqrt{L_R^2 + H^2}$$

- 内力：

$$\begin{Bmatrix} f_{\mathrm{in}}^x \\ f_{\mathrm{in}}^y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Pi_{\mathrm{in}}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Pi_{\mathrm{in}}}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

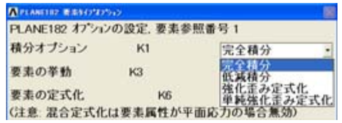


$E = 1$
$L_L = 2$
$L_R = 1$
$H = 5$
$f_{\mathrm{ex}}^x = 0$
$f_{\mathrm{ex}}^y = -0.1$

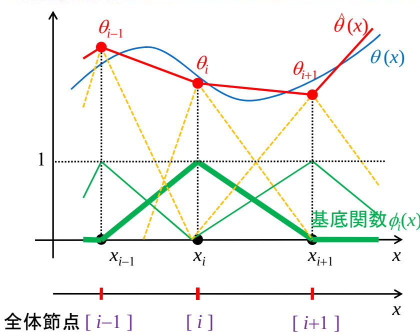


本章 と CAE の関わり ～要素を特徴づけるもの～

- 有限要素法や境界要素法では，「要素」なる概念があります．さらに「ガウス積分点」なる概念もあります．
  - 例）形状や次数
  - 例）次数低減積分
- 応力は要素間で不連続となるほうが正しい
  - 現実はデフォルトで平滑化されることが多いようですが…



折れ線（区分１次）関数による補間法(1)

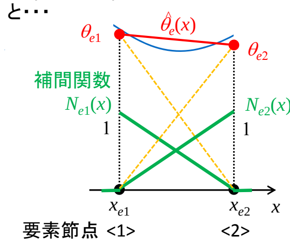


補間特性: $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$

$$\hat{\theta}(x) = \sum_i \theta_i \, \phi_i(x)$$

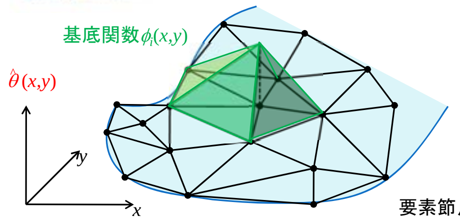
参考：$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \, \boldsymbol{e}_i$

節点ではなく，e 番目の要素（ $x_{e1} < x \leqq x_{e2}$ ）に注目すると･･･

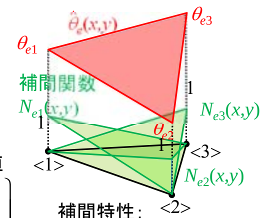


補間特性: $N_{ei}(x_{ej}) = \delta_{ij}$

2-D スカラ場の区分１次補間



節点ではなく，e 番目の要素に注目すると･･･



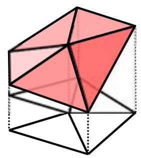
要素節点値

$$\hat{\theta}_e(x) = \underbrace{\left[N_{e1}(x,y) \quad N_{e2}(x,y) \quad N_{e3}(x,y) \right]}_{\mathbf{N}_e} \begin{Bmatrix} \theta_{e1} \\ \theta_{e2} \\ \theta_{e3} \end{Bmatrix}$$

補間特性：
$N_{ei}(x_{ej}, y_{ej}) = \delta_{ij}$

$$\hat{\theta}(x) = \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \hat{\theta}_e(x) = \underbrace{\left\{ \sum_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \mathbf{N}_e \mathbf{L}_e \right\}}_{\text{大域的な補間関数}} \boldsymbol{\theta}$$

C0 連続性 OK：

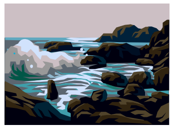


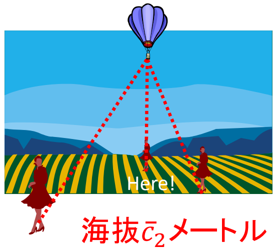
ユークリッド空間での最良近似問題

問：高原（海抜 $\bar{c}_2$ メートル）で，気球に最も近づける点はどこですか？

答：気球の直下（気球から高原に下した垂線の足）

- これを数学的にどのように記述するか？ それが，ここでの主題です．⇒「最良近似問題」
- 考え方は2つ

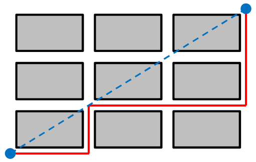




海抜 $\bar{c}_2$ メートル

ノルム（距離）の定義は実に色々

ユークリッドノルム（直線距離）だけを距離と思い込んでしまうと，大変です．



例１：最寄駅から自宅までの距離を聞かれたら，直線距離（数学）でなく，道のり（経験）で答えるでしょう．

例２：京都の碁盤の目は，街区距離

例３：東京からブラジルまでの距離（直線 or 球体上）

例４：$\|\boldsymbol{x}\|_p \equiv \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}$

関数 $f(x), g(x)$ の直交性と距離の定義

区間 $a \le x \le b$ における

「定義」とは，素直に受け入れるべきもの．

- 直交性（内積 $(f, g) = 0$）

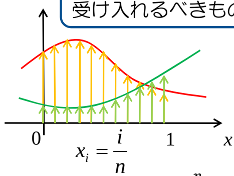
$$\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x = 0$$

  - 例：$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x \, \mathrm{d}x = 0$

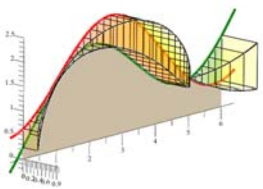
- ある種の距離（ノルム）

$$\sqrt{\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)^2 \mathrm{d}x}$$

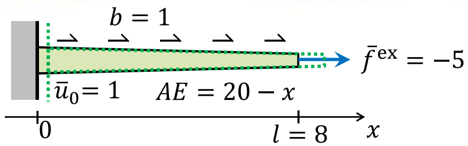
  - 分散・偏差の極限
  - 図化：チューブの体積

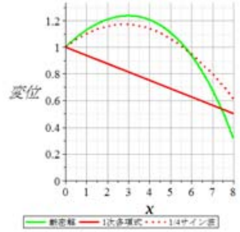


$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(x_i)$$



古典的最良近似の例





- 厳密解：$u(x) = 1 + x + 17 \ln\left(1 - \frac{x}{20}\right)$

1. １次関数：
   - $\hat{u}(x) = 1 + c_1 x$
   - $\hat{w}(x) = w_1 x$

   $c_1 = -\frac{1}{16}$

2. sin1/4波：
   - $\hat{u}(x) = \cos\left(\frac{x}{16}\pi\right) + c_1 \sin\left(\frac{x}{16}\pi\right)$
   - $\hat{w}(x) = w_1 \sin\left(\frac{x}{16}\pi\right)$

   $c_1 = \frac{2(\pi^2 - 10\pi + 32)}{\pi(\pi^2 + 1)}$