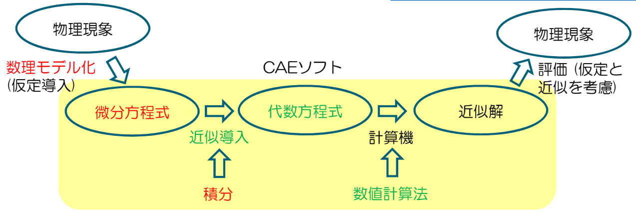
本講義の構成

1. はじめに
2. 数ベクトル・行列と3次元空間
3. 1変数関数における微分の考え方
4. スカラ値関数における微分の考え方
5. 物理現象の数理モデリング
6. ベクトル場における微分の考え方
7. 積分の考え方

参考：「数値計算法講座」
1. はじめに
2. 連立1次方程式Ax=b
3. 非線形方程式の求解
4. 補間と数値積分の概要
5. 重み付き残差法と最良近似



数学・物理は理論構築の歴史が面白い

—大森英樹「新装版 力学的な微分幾何」序文に基づく—

- 先人達が試行錯誤しつつ，どのような攻撃にも耐えうるよう強固に作り上げた公理，定理，公式の集合
  - 冷徹で，人の所作に思えない
  - 西洋の教会を真正面から眺めた時，完全さに打ちひしがれる
- 教会の裏側はまだ工事中
  - 人の熱気・泥臭さが伝わってくる
  - 歴史の後追いがわかりやすいことも
  - 裏口，抜け道を探そう
    ＝ 直観で納得しやすい
  - 要は〇〇ですね，と言えればよい

建築中のサグラダファミリア，実は鉄筋コンクリート造（撮影：福井大学 桑水流理 准教授）

行列（マトリクス）の定義

- 行列（マトリクス）とは，数ベクトル $\mathbf{b}$ を別の数ベクトル $\mathbf{s}$ に変換するための係数

大文字で，太字かつ立体

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} = \overset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

  - Matrix：母体，基盤（metra：ギリシャ語で子宮）
- なお，次のような見方もできます．

$$= \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{Bmatrix} b_1 + \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{Bmatrix} b_2 + \begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{Bmatrix} b_3$$

  - 同じ風景でもまったく違って見えます
  - 実は，この見方が幾何学（後述）と相性がよい

連立1次方程式は幾何学的に解釈できる

- 正規直交座標系（基底ベクトル）を規定することで，幾何ベクトルが数値化され，数ベクトルで表現できるようになります
- ならば逆に，任意の数ベクトルに対して幾何学的な解釈を与えることもできるはず →「列空間」

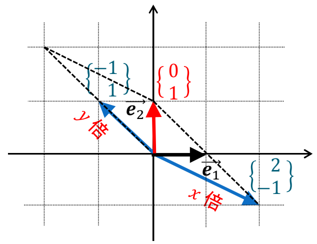
例）

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix} x + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ x(2\vec{\boldsymbol{e}_1} - 1\vec{\boldsymbol{e}_2}) + y(-1\vec{\boldsymbol{e}_1} + 1\vec{\boldsymbol{e}_2}) = (0\vec{\boldsymbol{e}_1} + 1\vec{\boldsymbol{e}_2})$$

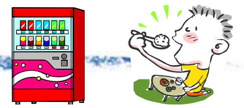


「幾何ベクトル」と「数ベクトル」の違い

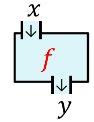
念仏：『幾何ベクトルは存在！』

- 位置（ブツ）は，名前を付けるか，「コレ」と指差す他ありません
- 空間中に座標系（距離と角度の基準となるもの）をセットして初めて数値化できるものです
- ブツは不変でも，座標系の選び方で数値は変わります
- 基底ベクトル（ブツ！）の組に名前 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ を付けることで，幾何ベクトル（ブツ！）$\vec{a}$ を，$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$ と表現できます．このときのスカラ値の組 a_1, a_2, a_3 を適当に縦に並べたものが，数ベクトル $\mathbf{a} \equiv \{\vec{a}\} \equiv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$ です
- ここで，記号 {·} は，「ある基底ベクトル（座標系）を導入して，幾何ベクトルの成分を適当に並べよ」という重要な操作を表現しています
- （幾何ベクトルを1階のテンソルとも言います）

関数とは？

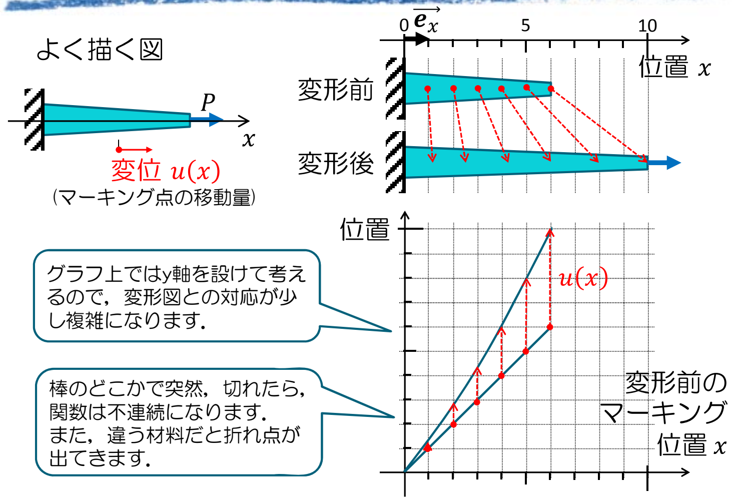


- 語源（音訳かつ意訳）
  - 関数 ← 函数（中国語：hánshù）：「函」は「箱」の旧字体．暗箱（ブラックボックス）
  - ← $f$unction（英語）：機能，作用，働き
- 表記法



  - $y = f(x)$　　一般的
  - $f \coloneqq x \to y$　　数学系（例　$f \coloneqq x \to x^2$）
  - $y = y(x)$　　省エネ（例：$m\ddot{y} + ky = 0$，$y = y(t)$）
    - ＊注）左のyは変数名であり値となりますが，右のyは関数名（暗箱の名前）であり，値ではありません．
- 意味
  - ある値x_1を入れたら，対応してある値y_1が出てくる．ある値x_2を入れたら…（以下同様）

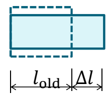
材料力学への応用：棒の変形



材料力学への応用：直ひずみの定義

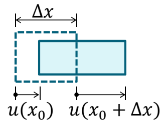
単位長さあたりの伸び量（微小が前提）ですが…

- その１：実験では，有限な長さの比



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_{\text{old}}} = \frac{l_{\text{new}} - l_{\text{old}}}{l_{\text{old}}}$$

  - l_{old}：試験前の標点間距離，ゲージ長さ
- その２：解析では，ゼロ極限の微分係数

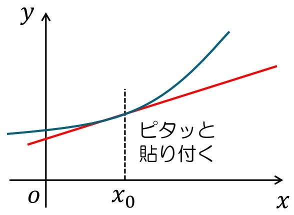


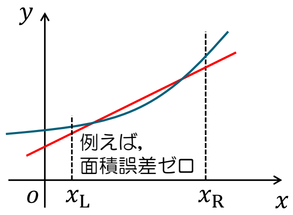
$$\varepsilon(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}$$

  - $x = x_0$で増分Δxをドンドン小さくする．原子や素粒子なんて見えないと思い込んで，気にせず何処までもドンドン小さくする（「連続体」の概念）．
- 脱線：軟化するとき，この定義の違いが問題になります

関数 $y=f(x)$ を1次関数で近似する方法

- 方針1：ある固定点 $x=x_0$ まわりで $y=f(x)$ に $y=ax+b$ がピタッと貼り付く係数 a,b を求める.
  - 答 → $Y=f'(x_0)X$ （$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$ ）（結果は同じでも導出の過程が違います）
- 方針2：ある固定区間 $x_{\mathrm{L}} \le x \le x_{\mathrm{R}}$ で何らかの誤差が最小化するような係数 a,b を求める.
  - 答 → 目測で直線 もしくは 最小二乗法



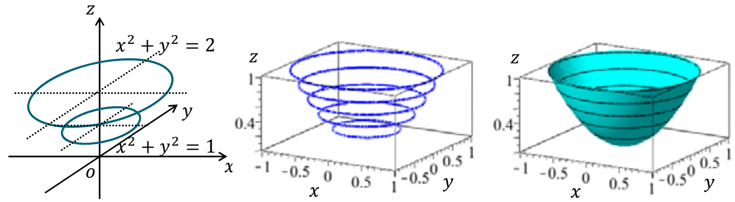


関数 $z=f(x,y)$ の描き方 ― 方法2A

平面 $z=c$ との交差線を探します（出力 z がある一定値となる入力値 (x,y) の組を見つけて曲線 ― 「等高線」 ― を引きます）

1. $z=0$ のとき $x^2+y^2=0$ を満たす組
2. $z=1$ のとき $x^2+y^2=1$ 〃
3. ：

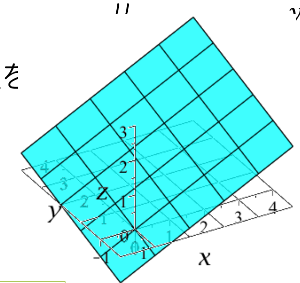
$y=$ の形でない関数を，陰(伏) 関数 (implicit －)といいます．これが「円」とわかるのは，これまでの経験です．

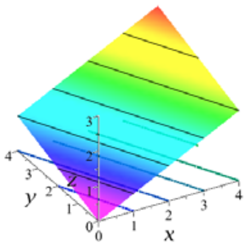


特に，平面（同次1次関数）について

平面 $z=ax+by$（好例： $z=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y$ ）を考える

- x,y それぞれについて正比例関数
  - y をある値に固定すると，x 軸方向に1進んだら a あがる
  - x 〃 y 〃 b 〃
- 原点を


メッシュ図


等高線図

先読み：接平面

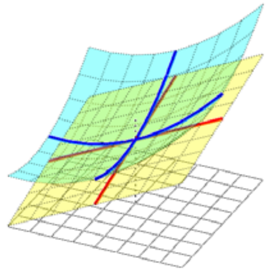
全微分とは接平面（理想世界）のこと

これも，1変数の場合には無い概念

- 復習：平面の式(注目点に原点を移動)
  - $\underbrace{Z}_{=z-z_0} = a \underbrace{X}_{=x-x_0} + b \underbrace{Y}_{=y-y_0}$
  - 数ベクトル $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}=[a \quad b]$ は x,y 方向偏微分係数
- 曲面 $z=f(x,y)$ の x,y 方向偏微分係数を使えば，その点でピタッと貼り付く平面が張れそうですね（例外あり）．
- そうすれば，(同次) 平面＝正比例関数ゆえ，「スレスレな理想世界」ができます． Z 等を $\mathrm{d}z$ 等で読みかえれば，

$$\mathrm{d}z = \underbrace{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}}_{=a} \mathrm{d}x + \underbrace{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}}_{=b} \mathrm{d}y$$

この式を「全微分」といいます．

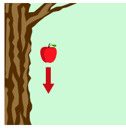


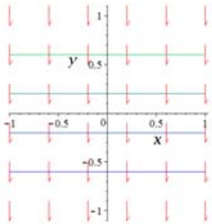
先読み：ベクトル値関数のヤコビ行列（多重積分における置換積分）

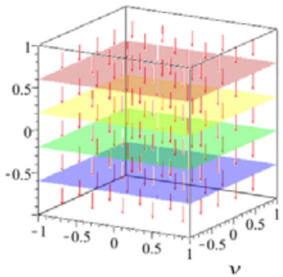
補足：位置エネルギと保存力

外力を死荷重と仮定すれば，「外力ポテンシャル」

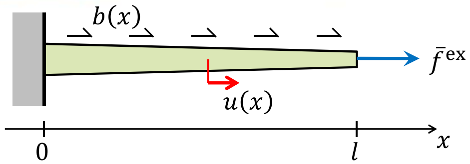
- $\Pi^{\mathrm{ex}}(x,y,z) \equiv mgz$ or $\Pi^{\mathrm{ex}}(x,y,z) \equiv -f_z^{\mathrm{ex}}\, z$
- このとき，$\boldsymbol{f}^{\mathrm{ex}}(x,y,z) \equiv -\boldsymbol{\nabla}\Pi^{\mathrm{ex}}(x,y,z)$ なる保存力ベクトルの場が存在

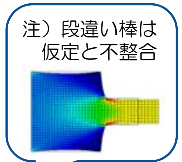






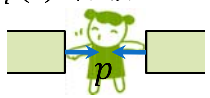
弾性棒（１次元弾性体）の静的問題





「棒」では x 方向のみ考えます（仮定/モデル化）

- ヤング率 $E(x)$
- 断面積 $A(x)$ （仮定：急に変化しない）
- 分布力 $b(x)$ （単位長さあたり）
- 変位 $u(x)$
- 内力 $p(x)$（引張を正と定義）

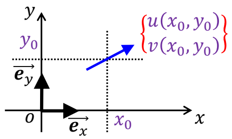


想像：仮想的に切断してみる．しかし，本来は一体なのだから，誰かがその両断面をつなぎ止めておく必要がある．その当事者は力を感じているはず．

ベクトル場の正規直交座標系での描き方

ある位置(x_0, y_0)に注目し，そこに適当に α 倍した矢印付き線分 $(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0))$ を描く（実際は，なかなか面倒な作業）

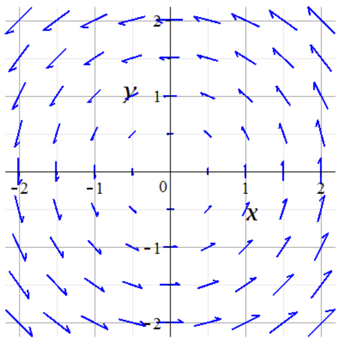
（その位置と矢印付き線分の始点が一致する必要はありません）



例）

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix}$$

- $(2,1)$で $\alpha(-1,2)$
- $(2,2)$で $\alpha(-2,2)$
- $(0,2)$で $\alpha(-2,0)$



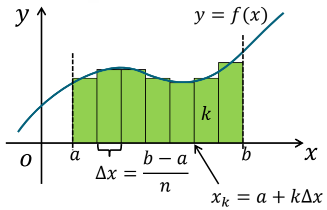
注）原点から原寸の矢印付き線分を描かないように

定積分とは … 面積となるものですが …

- 高校の微積分における
  定義の復習（意外と弱点）

定積分の定義：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x\, f_k\right)$$



$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ 　n 等分された短冊の幅

$x_k = a + k\,\Delta x$ 　k 番目の短冊の位置

$f_k \approx f(x_k)$ 　k 番目の短冊の高さ

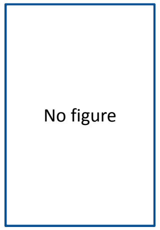
- $n \to \infty$するので，細かいことは気にしないでください．
  - 無限大：数値ではなく記号（なので，nとn+1に違いはない）
  - どれだけ先に進んでも，まだその先があること（禅問答）
- 積分記号 ∫ と総和記号 ∑ (summation, sigma) の出自は同じ

先読み：関数解析（無限次元の線形代数）

線積分の見方を少し変えると…

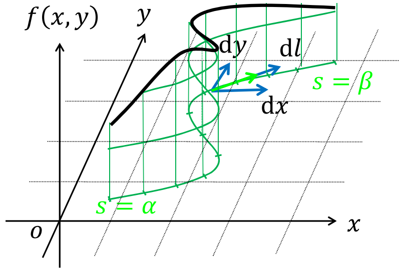
曲線 C 上に設けた座標（起点からの距離 s（スカラ量））に沿ってスカラ関数 $f(x,y)$ を積分

- 切断面の断面積
- 短冊切りのリーマン積分そのもの



とやま観光ナビHPより（http://www.info-toyama.com/tlibrary/photo_tateyama.html）

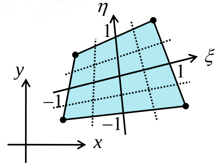
春のアルペンルート
バスに乗って積雪高さを逐一計測し，
短冊面積をΣすれば，総断面積を得る．



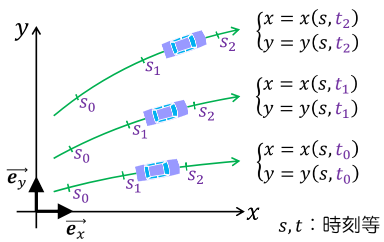
面積分：まずは曲線座標系を導入

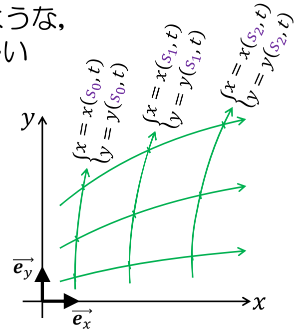
よく見かける曲線座標系の例：

- 極座標系，球面座標系
- アイソパラメトリック有限要素にて．



積分領域 A が定義しやすくなるような，曲線座標系をセットすることが多い



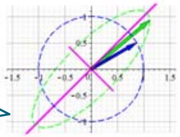


線形変換 $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{x}$ の幾何学的解釈の例

例）対称行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ $(a = 1/2)$

変形する物体を扱う連続体力学では，「解釈」でなく「幾何学そのもの」となります

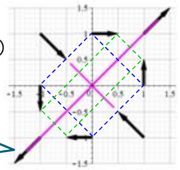
- 円上の1点 $\mathbf{x}$ に着目し，変換後の $\mathbf{y}$ を描画



$\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$ となる方向 $\mathbf{v}$ が2本あるようだ…

- 数点を同時に着目し，変換前から変換後のモーションのみを矢印で描画

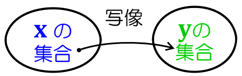
（ベクトル場の出現）
（変位場，速度場）



方向 $\mathbf{v}$ を座標軸にすると楽ができそう…

- 全点を同時に着目し，変換前の全着色点と変換後の全着色点を描画

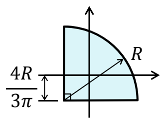
- もはや「集合」の「線形写像」
- 変形勾配テンソルの表現行列



正定値行列の例：はりの2軸曲げ

- 断面2次モーメント（2階テンソル）の表現行列：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$



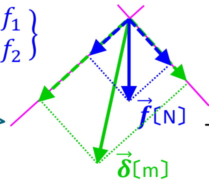
$$\alpha = \frac{R^4(9\pi^2 - 64)}{144\pi}$$

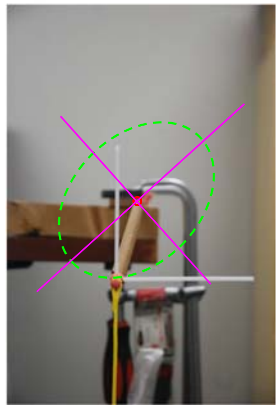
$$\beta = \frac{R^4(9\pi - 32)}{72\pi}$$

- 自由端の荷重–たわみ関係：

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{l^3}{3E} \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

線形ゆえ重ね合わせできるため，主軸 $\mathbf{v}$ 上で考えると連成が分離できる





一定大きさの荷重を周回で負荷（$|\vec{f}|$ = 一定）